سوال ۱

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

تابع $(f+g)(x)$ با دامنه $\{m,1,4\}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$(f+g)(x)=\{(m,1+\sqrt{m}),(1,m+1),(4,6)\}$$

اگر $0<m<1$ باشد، باید $1+\sqrt{m}\le m+1$ یعنی $\sqrt{m}\le m$ باشد، که این معادله در بازه $(0,1)$ جواب ندارد.

اگر $m>1$ باشد، باید $1+\sqrt{m}\ge 1+m$ باشد که امکان پذیر نیست.

با در نظر گرفتن $m=0$ داریم: $(f+g)(x)=\{(0,1),(1,1),(4,6)\}$

و اگر $m=1$ باشد: $(f+g)(x)=\{(1,2),(4,6)\}$

که هر دو تابع صعودی هستند.

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

به‌ازای $x<0$ داریم $f(x)\le 0$ و به‌ازای $x>4$ داریم $f(x)\ge 0$؛ هم‌چنین $\pi<4<\frac{3\pi}{2}$ و $3\pi<10<\frac{7\pi}{2}$ پس $\sin 4$ و $\sin 10$ اعدادی منفی‌اند. تابع صعودی $f(x)$ دارای دامنه و برد $R$ است و طبق فرض سؤال محور $x$ها را در دو نقطهٔ $x=0$ و $x=4$ قطع کرده است. پس $f(0)=0$ و $f(4)=0$ است، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت حتماً بین $x=0$ و $x=4$ تابع ثابت $f(x)=0$ است، چرا که امکان ندارد بعد از نقطهٔ $x=0$ صعود کند و دوباره برگردد تا محور $x$ها را در $x=4$ قطع کند، اما در مورد بعد $x=4$ و قبل $x=0$ نمی‌توان نظری داد.

پس تابع $f(2x)$ بین $x=0$ و $x=2$ ثابت است و $f(2x)$ در بازهٔ $[0,2]$ قطعاً صفر می‌شود، پس $x=1$ قطعاً تابع $y$ را صفر می‌کند و در دامنهٔ $y=\sqrt{\sin x.f(2x)}$ قرار دارد.

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۳

چون تابع یک‌به‌یک است، باید زوج مرتب‌های $(۱,۲)$ و $(m^۲,۲)$ یکسان باشند. پس داریم:

$$m^۲ = ۱ \Rightarrow m = \pm ۱$$

اگر $m = ۱$ باشد، تابع f به صورت زیر است که یکنواست و قابل قبول نیست.

$$f = \{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴),(۴,۵)\}$$

اگر $m = -۱$ باشد، تابع f به صورت زیر است که یکنوا نیست.

$$f = \{(-۴,-۵),(۱,۲),(۲,-۳),(۳,-۴)\}$$

بنابراین فقط $m = -۱$ قابل قبول است و در نتیجه داریم:

$$f^{-۱}(۳m-۱) = f^{-۱}(-۴) = ۳$$

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۱

تابع g در محدوده‌ای تعریف شده است که $\frac{f(x-۱)}{f(۲-x)} \geq ۰$ باشد، بنابراین داریم:

$$f(x-۱) = ۰ \xrightarrow{f(۴)=۰} x-۱ = ۴ \Rightarrow x = ۵$$

$$f(۲-x) = ۰ \xrightarrow{f(۴)=۰} ۲-x = ۴ \Rightarrow x = -۲$$

از طرفی تابع $y = f(x-۱)$ اکیداً نزولی است، بنابراین برای $x > ۵$ منفی و برای $x < ۵$ مثبت است. همچنین تابع $y = f(۲-x)$ اکیداً صعودی است و برای $x > -۲$ مثبت و برای $x < -۲$ منفی می‌باشد.

| x | $-\infty$ | | $-۲$ | | $۵$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x-۱) | | + | | + | ۰ | − | |
| f(۲-x) | | − | ۰ | + | | + | |
| p | | − | | + | ۰ | − | |

جواب

$$\Rightarrow D_g = (-۲,۵]$$

دامنه تابع شامل ۷ عدد صحیح است.

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

در تابع $y = -۳f(\frac{۱}{۲}x+۱) - ۶$ ضرایب ۱ و $\frac{۱}{۲}$ و ۶- در یکنوایی تابع تأثیری ندارند، اما ضریب ۳- نمودار تابع را نسبت به محورx ها قرینه کرده است. بنابراین چنانچه تابع $y = -۳f(\frac{۱}{۲}x+۱) - ۶$ اکیداً نزولی باشد، تابع $y = f(x)$ حتماً اکیداً صعودی بوده است. همچنین اگر تابع $y = f(x)$ اکیداً صعودی باشد، تابع $y = f(-x)$ که قرینه تابع $y = f(x)$ نسبت به محور y ها می‌باشد، اکیداً نزولی خواهد بود.

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

گزینه «۱»: اگر دو تابع که یکی از آن‌ها اکیداً صعودی و دیگری اکیداً نزولی است، ترکیب شوند، حاصل تابعی اکیداً نزولی خواهد بود، بنابراین تابع $f(g((x))$ اکیداً نزولی است. هم‌چنین اگر تابع f نزولی (صعودی) باشد، f− صعودی (نزولی) است، پس تابع $-f(g((x))$ اکیداً صعودی است و از آن جایی که مجموع دو تابع اکیداً صعودی اکیداً صعودی است، تابع $f(x) + (-f(g((x)))$ نیز اکیداً صعودی خواهد بود.

گزینه «۲»: اگر تابع g که مقادیر آن مثبت است، نزولی (صعودی) باشد، تابع $\frac{1}{g}$ صعودی (نزولی) خواهد بود. هم‌چنین دو تابع با مقادیر مثبت که هر دو صعودی (نزولی) می‌باشند، حاصل ضرب آنها نیز صعودی (نزولی) است. پس می‌توان گفت که تابع $y = f(x) \times \frac{1}{g(x)}$ صعودی است.

گزینه «۳»: یکنوایی هر تابع با تابع وارونش یکسان است، پس $g^{-1}$ نیز اکیداً نزولی است. از آنجا که f− نیز اکیداً نزولی است، تابع $y = g^{-1}(x) - f(x)$ که مجموع دو تابع اکیداً نزولی است، اکیداً نزولی خواهد بود.

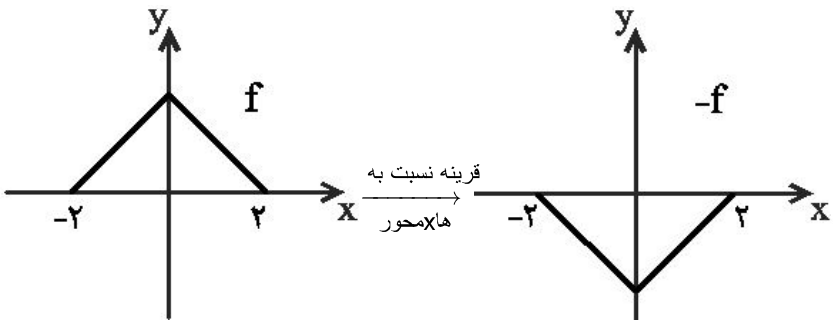
گزینه «۴»: تابع $y = f(-x)$ اکیداً نزولی است، بنابراین تابع $y = g(f(-x))$ که ترکیب دو تابع اکیداً نزولی است، اکیداً صعودی خواهد شد.

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

می‌توان تابع f را به صورت زیر در نظر گرفت که نسبت به محورyها متقارن است و در بازه‌ی [۰ , ۲] اکیداً نزولی است. قرینه‌ی آن را نسبت به محورxها رسم می‌کنیم تا نمودار تابع f− حاصل شود.




همانطور که مشاهده می‌شود تابع f− در بازه‌ی [−۲ , ۰] اکیداً نزولی است.

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$f(x) = \frac{x^2-1}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} = x - \frac{1}{x}$ ، $x > 0$

$g(x) = f(x) + f(\frac{1}{x}) = (x - \frac{1}{x}) + (\frac{1}{x} - \frac{1}{\frac{1}{x}})$

$= x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} - x = 0$

سوال ۹

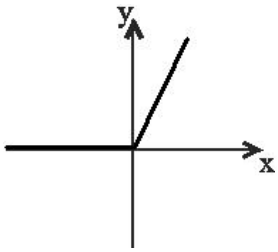
پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

ابتدا هر یک از توابع را به صورت دو ضابطه‌ای نوشته و سپس نمودار آنها را رسم کرده و با توجه به نمودار صعودی یا نزولی بودن آنها را مشخص می‌کنیم:

گزینه (۱):

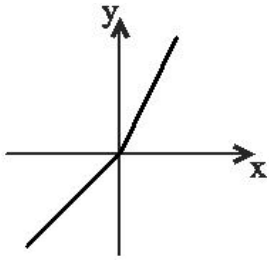
$$y = x + |x| = \begin{cases} ۲x & , \quad x \geq ۰ \\ ۰ & , \quad x < ۰ \end{cases}$$




با توجه به نمودار، این تابع صعودی است.

گزینه (۲):

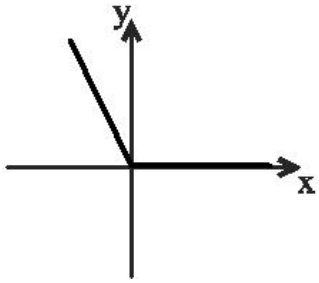
$$y = ۲x + |x| = \begin{cases} ۳x & , \quad x \geq ۰ \\ x & , \quad x < ۰ \end{cases}$$




با توجه به نمودار، این تابع صعودی است.

گزینه (۳):

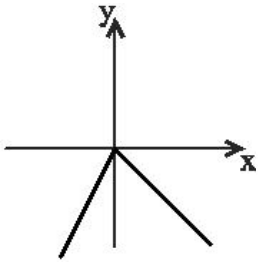
$$y = |x| - x = \begin{cases} ۰ & , \quad x \geq ۰ \\ -۲x & , \quad x < ۰ \end{cases}$$




با توجه به نمودار، این تابع نزولی است.

گزینه (۴):

$$y = x - ۲|x| = \begin{cases} -x & , \quad x \geq ۰ \\ ۳x & , \quad x < ۰ \end{cases}$$




با توجه به نمودار، این تابع نه صعودی است نه نزولی (غیریکنواست).

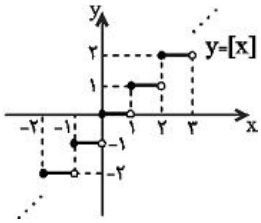
سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

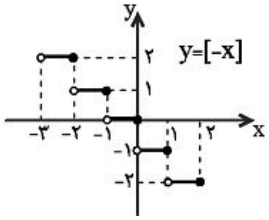
نمودار هر یک از توابع را رسم کرده و یکنوایی آنها را تعیین می‌کنیم:

گزینه (۱):



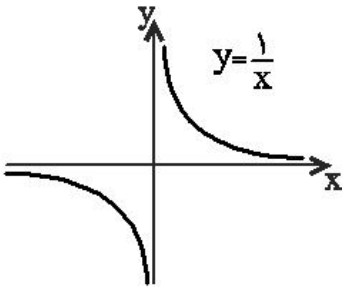

با توجه به نمودار، تابع $y = [x]$ صعودی است، پس یکنواست.

گزینه (۲):برای رسم نمودار تابع $y = [-x]$، قرینه‌ی نمودار $y = [x]$ را نسبت به محورyها رسم می‌کنیم.




با توجه به نمودار، تابع $y = [-x]$ نزولی است، پس یکنواست.

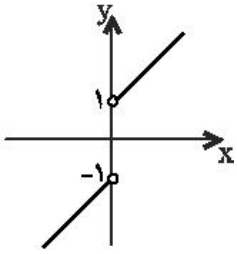
گزینه (۳):




با توجه به نمودار، تابع $y = \frac{1}{x}$ در دامنه‌ی خود یعنی $R - \{0\}$ غیریکنواست.

گزینه (۴):

$$y = x + \frac{|x|}{x} = \begin{cases} x + \frac{x}{x} = x + 1 & x > 0 \\ x + \frac{-x}{x} = x - 1 & x < 0 \end{cases}$$



با توجه به نمودار، تابع $y = x + \frac{|x|}{x}$ صعودی است، پس یکنواست.